引用格式：*黄春福，闫久江，李安，等.原子重力仪动态测量系统中加速度计的现场标定[J].飞控与探测，2025，8(2)：72-81.*
Citation：*HUANG C F，YAN J J，LI A，et al. Field calibration of accelerometer in the dynamic measurement system of atomic gravimeter[J]. Flight Control & Detection，2025，8(2)：72-81.*

原子重力仪动态测量系统中加速度计的现场标定*

黄春福[1]，闫久江[2]，李　安[2]，覃方君[2]，车　浩[2]，龚文斌[2]

（1. 海军工程大学 作战运筹与规划系·武汉·430033；
2. 海军工程大学 电气工程学院·武汉·430033）

摘　要：加速度计可用于原子重力仪的振动校正，抑制振动噪声的干扰，提高原子重力仪的动态测量精度，是测量系统中不可缺少的一部分。为了获得更高的器件精度，在使用前需对加速度计误差进行标定。结合原子重力仪动态测量系统，基于加速度计重力矢量模不变原则，将加速度计置于稳定平台多个姿态下测量，对比原子重力仪高精度重力输出，建立代价函数。为了避免迭代方法耗时长、对初始值依赖较大等问题，对代价函数进行简化，推导了线性模型，采用最小二乘方法计算零偏、标度因数和非正交系数等标定参数。开展仿真试验，探究加速度计噪声水平，加速度计姿态数量以及参数初始值对各标定方法的影响，初步证明了本文方法的有效性和精度优势。进一步开展码头系泊条件下的实测试验，结果表明，标定后加速度计输出矢量模的平均值从 1.003 5 g 下降到 1.000 1 g，更接近重力加速度参考值 g，且标准差下降了 70.5%。

关键词：加速度计；现场标定；原子重力仪；最小二乘法
中图分类号：U666.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：2096-5974(2025)02-0072-10
DOI：10.20249/j.cnki.2096-5974.2025.02.009

Field Calibration of Accelerometer in the Dynamic Measurement System of Atomic Gravimeter

HUANG Chunfu[1]，YAN Jiujiang[2]，LI An[2]，QIN Fangjun[2]，CHE Hao[2]，GONG Wenbin[2]

(1. Department of Operational Research and Programming，Naval University of Engineering，Wuhan 430033；
2. School of Electrical Engineering，Naval University of Engineering，Wuhan 430033)

Abstract：The accelerometer can be used for vibration correction of atomic gravimeters，mitigating vibration noise interference，and enhancing the dynamic measurement accuracy of atomic gravimeters. It constitutes an essential component of the measurement system. To achieve higher device accuracy，it is necessary to calibrate the accelerometer error prior to utilization. In this paper，combined with the dynamic measurement system of the atomic gravimeter，based on the principle of the modulus invariance of the accelerometer gravity vector，the accelerometer is placed on a stable platform for measurement in various orientations，and a cost function is established by compa-

* 基金项目：国家自然科学基金（42274013）
作者简介：黄春福，男，博士，讲师。
通信作者简介：覃方君，男，博士，教授，博士生导师。

ring the high-precision gravity output of the atomic gravimeter. To address issues related to time-consuming iterative methods and significant reliance on initial values, the cost function is simplified, a linear model is deduced, and the least squares method is employed to compute calibration parameters such as zero bias, scale factor, and non-orthogonal coefficient. Simulation experiments are conducted to investigate the impact of accelerometer noise level, the number of accelerometer orientations, and the initial parameter values on each calibration method. The proposed method's effectiveness and accuracy advantages are preliminarily demonstrated. Subsequent practical assessments are conducted under dock mooring conditions. The results showed that after calibration, the average value of the accelerometer output vector modulus decreased from 1.003 5 g to 1.000 1 g, which is closer to the gravity acceleration reference value, and the standard deviation decreased by 70.5%.

Keywords: accelerometer; field calibration; atomic gravimeter; least squares

0 引　　言

加速度计可以用于原子重力仪的振动校正，有效抑制原子重力仪动态测量过程中振动噪声的干扰，提高测量精度[1-2]，是测量系统中不可缺少的一部分。这也对加速度计测量的准确性提出了更高的要求。虽然加速度计在出厂时已完成标校，但是随着器件老化和使用环境的改变，其性能降低，标度因数、零位偏差和非正交系数等发生改变，对于原子重力精密测量来说，微小的改变也将对其测量精度产生巨大影响。因此，在使用前需对误差进行标定，以获得更好的使用效果。

加速度计器件级标定可使用离心机、速率转台等实验室设备估计加速度计的误差系数，称为实验室标定。过程是将加速度计从设备上取下，通过多位置法进行标定，记录相应的转台姿态角和加速度计输出，再移动到设备上。其中，六位置法是一种经典实验室标定方法，此方法的准确性取决于加速度计敏感轴与转台是否对齐，不能估计非正交性[3]。2002 年，牛小骥等[4]提出了一种改进的六位置法，可以得到所有的标定系数。2002 年，Shin 等[5]提出了一种通用的多位置法，将加速度计放置在 6 个以上位置，提高了校准精度。为了获得更多误差系数，如非线性比例因子等，研究人员还引入离心机和机械臂等标定设备[6-7]。此外，引入卡尔曼滤波、非线性最小二乘以及神经网络等优化方法，用于提高标定系数精度[8-10]。

虽然实验室标定在转台、离心机等设备的辅助下，可以十分精确地确定各项误差，但是将其移动到系统重新安装的过程中，将再次引入新的误差[11]。在原子重力仪动态测量系统的应用中，拉曼光反射镜与加速度计固联，而反射镜的安装需要反复调节其反射角度，保证入射拉曼光与反射拉曼光的波矢方向重合，将加速度计取下、标定、再安装的过程耗时耗力[12]。此方法还依赖标定设备的精度，部分标定用转台精度要求达到了 0.5″～1″。因此，寻求一种无须依靠高精度转台的加速度计现场标定方法是提高其测量精度的关键。2021 年，Xu 等[13]提出了一种无转台情况下的加速度计标定方案，分析了 6 个指定位置加速度计静态输出数据特性，利用参数迭代，提高了标定精度。但是原子重力仪动态测量系统中稳定平台的稳定角度有限，不能满足其 3 个轴正负方向分别朝上的位置要求。若用于原子重力仪动态测量系统中加速度计的标定，需对此方法进行改进。

原子重力仪在静态或系泊条件下具有较好的重力测量性能，基于加速度计静态测量矢量模等重力矢量的原则，定义代价函数，开展标定方法研究，本文可能的创新在于：

1）通过合理简化，使代价函数具有线性性质，在测量系统中稳定平台的辅助下，完成 n 位置的加速度测量，通过最小二乘法标定加速度计的各项误差，在保证精度的同时，缩短了标定所需的时间。

2）依托现有的原子重力仪动态测量系统，无须额外增加设备，可在野外静态条件下开展，现场性好，有效提升了加速度计以及原子重力仪动态测量试验系统的测量精度。

1 加速度计误差模型

考虑标度因数、零位偏置以及 3 个测量轴非

正交等误差，加速度计的输出表示为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{n} \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{a}_{\mathrm{m}}=[a_{\mathrm{m}x},\ a_{\mathrm{m}y},\ a_{\mathrm{m}z}]^{\mathrm{T}}$ 为加速度计的测量输出；$\boldsymbol{a}=[a_x,\ a_y,\ a_z]^{\mathrm{T}}$ 为加速度计测量值在扣除了标度因数和零位偏置误差的真实输出；$\boldsymbol{b}=[b_x,\ b_y,\ b_z]^{\mathrm{T}}$ 为零位偏置；$\boldsymbol{n}$ 为高斯噪声，其平均值为 0，标准差为 σ_a；$\boldsymbol{S}$ 为标度因数；$\boldsymbol{M}$ 为非正交矩阵，表征加速度计测量坐标系的输出在载体坐标系的耦合关系[14-16]

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & m_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

2 基于原子重力仪高精度输出的加速度计现场标定

在野外环境下，没有转台提供精确的姿态角信息，使用自然法则作为参考[3,16-19]，原子重力仪野外静态定点测量的精度较高，可以满足加速度计标定的需求。因此，结合原子重力仪动态测量系统，以重力仪静态定点测量的绝对重力值作为参考，主要的标定思路是静止状态下，无论加速度计的方向如何，其三轴加速度测量值分离出误差项后，矢量与重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 的模相等，即

$$\|\boldsymbol{a}\|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2=\|\boldsymbol{g}\|^2 \tag{4}$$

将加速度计置于 n 个不同的位置，测量 3 个轴的输出，可以写出代价函数，该函数描述了加速度与重力的平方值的偏差

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{S},\boldsymbol{M},\boldsymbol{b}) &= \sum(\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{g}\|^2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_{k,x}^2+a_{k,y}^2+a_{k,z}^2-g^2)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

其中，k 表示第 k 个位置的输出。由于代价函数是非线性的，需用迭代的方法求解，使用各种优化策略，通过最小化非线性代价函数，可以获得误差系数。如高斯-牛顿（Gauss-Newton，G-N）法[15-16,19-20]、列文伯格-马夸尔特（Levenberg-Marquardt，L-M）法[21]和 Kalman 滤波[22-23]等。但迭代方法复杂耗时，依赖初始值，且对噪声敏感。为了快速精准地获得误差系数，本文提出一种基于线性最小二乘的优化方法，需重新推导加速度输出矢量和重力矢量的关系，使其具有线性关系，下面是推导过程。

将式（1）代入式（4）可以得到

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\|^2 &= \|\boldsymbol{g}\|^2 \\ &= \left(\frac{a_{\mathrm{m}x}-b_x}{s_x}\right)^2+\left(\frac{a_{\mathrm{m}y}-b_y}{s_y}+\frac{b_x m_1-m_1 a_{\mathrm{m}x}}{s_x s_y}\right)^2+ \\ &\quad \left(\frac{a_{\mathrm{m}z}-b_z}{s_z}+\frac{b_x m_2-m_2 a_{\mathrm{m}x}}{s_x s_z}+\frac{b_y m_3-m_3 a_{\mathrm{m}y}}{s_y s_z}+ \right. \\ &\quad \left. \frac{m_1 m_3 a_{\mathrm{m}x}-m_1 m_3 b_x}{s_x s_y s_z}\right)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

令 $k_{11}=\dfrac{1}{s_x}$，$k_{22}=\dfrac{1}{s_y}$，$k_{33}=\dfrac{1}{s_z}$，$k_{21}=\dfrac{m_1}{s_y}$，$k_{31}=\dfrac{m_2}{s_z}$，$k_{32}=\dfrac{m_3}{s_z}$，$b_1=\dfrac{b_x}{s_x}$，$b_2=\dfrac{b_y}{s_y}$，$b_3=\dfrac{b_z}{s_z}$，则

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\|^2 &= g^2=(k_{11}a_{\mathrm{m}x}-b_1)^2+(k_{22}a_{\mathrm{m}y}-b_2+ \\ &\quad b_1k_{21}-k_{11}k_{21}a_{\mathrm{m}x})^2+(k_{33}a_{\mathrm{m}z}-b_3+ \\ &\quad b_1k_{31}-k_{11}k_{31}a_{\mathrm{m}x}+b_2k_{32}-k_{22}k_{32}a_{\mathrm{m}y}+ \\ &\quad k_{11}k_{21}k_{32}a_{\mathrm{m}x}-k_{21}k_{32}b_1)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

其中，由于非正交系数 $\boldsymbol{M}$ 相比标度因数和零偏一般较小，其二次项可以忽略，将式（6）展开并化简为

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\|^2 &= \|\boldsymbol{g}\|^2=k_{11}^2a_{\mathrm{m}x}^2+k_{22}^2a_{\mathrm{m}y}^2+k_{33}^2a_{\mathrm{m}z}^2- \\ &\quad 2(k_{11}k_{21}k_{22})a_{\mathrm{m}x}a_{\mathrm{m}y}-2(k_{11}k_{31}k_{33})a_{\mathrm{m}x}a_{\mathrm{m}z}- \\ &\quad 2(k_{22}k_{32}k_{33})a_{\mathrm{m}y}a_{\mathrm{m}z}+2(-b_1k_{11}+b_2k_{11}k_{21}+ \\ &\quad b_3k_{11}k_{31})a_{\mathrm{m}x}+2(b_1k_{21}k_{22}-b_2k_{22}+ \\ &\quad b_3k_{22}k_{32})a_{\mathrm{m}y}+2(b_1k_{31}k_{33}+b_2k_{32}k_{33}- \\ &\quad b_3k_{33})a_{\mathrm{m}z}+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2b_1b_2k_{21}- \\ &\quad 2b_1b_3k_{31}-2b_2b_3k_{32} \end{aligned} \tag{8}$$

$$a_{\mathrm{m}z}^2=\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{1}{k_{33}^2}\boldsymbol{K} \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{x}=[a_{\mathrm{m}x}^2,a_{\mathrm{m}y}^2,2a_{\mathrm{m}x}a_{\mathrm{m}y},2a_{\mathrm{m}x}a_{\mathrm{m}z},2a_{\mathrm{m}y}a_{\mathrm{m}z},2a_{\mathrm{m}x},2a_{\mathrm{m}y},2a_{\mathrm{m}z},1]$，

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{11}^2 \\ k_{22}^2 \\ -k_{11}k_{21}k_{22} \\ -k_{11}k_{31}k_{33} \\ -k_{22}k_{32}k_{33} \\ -b_1k_{11}+b_2k_{11}k_{21}+b_3k_{11}k_{31} \\ b_1k_{21}k_{22}-b_2k_{22}+b_3k_{22}k_{32} \\ b_1k_{31}k_{33}+b_2k_{32}k_{33}-b_3k_{33} \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2-g^2-2b_1b_2k_{21}-2b_1b_3k_{31}-2b_2b_3k_{32} \end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{x}_i=[a_{\mathrm{mx},i}^2, a_{\mathrm{my},i}^2, 2a_{\mathrm{mx},i}a_{\mathrm{my},i}, 2a_{\mathrm{mx},i}a_{\mathrm{mz},i}, 2a_{\mathrm{my},i}a_{\mathrm{mz},i}, 2a_{\mathrm{mx},i}, 2a_{\mathrm{my},i}, 2a_{\mathrm{mz},i}, 1]$ 为自变量，$\boldsymbol{y}_i=a_{\mathrm{mz},i}^2(i=1,2,\cdots,n)$ 为观测量，n 为自变量和观测量的个数，即加速度计不同姿态测量的数量。通过测量不同位置的加速度计三轴输出，得到 n 个自变量组成的矩阵 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \cdots, \boldsymbol{x}_n]^{\mathrm{T}}$ 以及观测矩阵 $\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \cdots, \boldsymbol{y}_n]^{\mathrm{T}}$，而后找到参数矢量（式（10）），使得残差的平方和最小，即

$$\min \varepsilon=\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|^2 \tag{11}$$

将式（11）等号右边展开，可得

$$\begin{aligned}\min \varepsilon &= (\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{Y})\\ &= (\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{Y})\\ &= \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\end{aligned} \tag{12}$$

对 $\boldsymbol{\beta}$ 求偏导，得

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\beta}}=2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{13}$$

为了求极值，令式（13）等于零矩阵，可得

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{14}$$

则

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \tag{15}$$

利用线性最小二乘最优解的公式，无须迭代，即可得到最优参数。这里预先分析最小二乘法、G-N 法和 L-M 法 3 种算法的时间复杂度，对于本文的问题，样本数量即加速度计不同停留位置为 n，标定参数数量为 m，线性最小二乘法需要求解线性方程，其时间复杂度通常为 $O(m^3)$。G-N 法每次迭代需要计算雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{J}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，复杂度为 $O(mn)$，求解 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$ 的复杂度为 $O(m^3)$，对于 l 次迭代，G-N 法的总时间复杂度为 $O(l(mn+n^3))$。L-M 法的时间复杂度与 G-N 法相近，但是由于正则化项的引入会多一些矩阵加法和调整，总的复杂度为 $O(l(mn+n^3))$。以上分析可以看出，线性最小二乘法的时间复杂度更低，后续试验中将进一步使用计算耗时和迭代次数两项指标进行事后统计对比。

3　加速度计标定方法仿真试验

为了验证上述标定方法的有效性以及精度，首先开展仿真试验。设定某点重力加速度值为 g，在该点放置原子重力仪动态测量系统，测得重力加速度值为 g_{m}，是在 g 上添加了均值为 0、标准差为 σ_g 的高斯噪声。设定三轴加速度计真实值为 $[a_x, a_y, a_z]$，在标度因数、零位偏置和非正交矩阵的作用下，其测量值为 $[a_{\mathrm{mx}}, a_{\mathrm{my}}, a_{\mathrm{mz}}]$。使加速度计横向、纵向倾斜多个角度，水平失准角分别为 θ_x 和 θ_y，则

$$\begin{cases}a_x=-g\sin\theta_y\\ a_y=g\sin\theta_x\cos\theta_y\\ a_z=g\cos\theta_x\cos\theta_y\end{cases} \tag{16}$$

设定误差真值为 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=[s_x^{\mathrm{T}}, s_y^{\mathrm{T}}, s_z^{\mathrm{T}}, b_x^{\mathrm{T}}, b_y^{\mathrm{T}}, b_z^{\mathrm{T}}, m_1^{\mathrm{T}}, m_2^{\mathrm{T}}, m_3^{\mathrm{T}}]$，则

$$\begin{cases}a_{\mathrm{mx}}=s_x^{\mathrm{T}}a_x+b_x^{\mathrm{T}}+n_x\\ a_{\mathrm{my}}=s_y^{\mathrm{T}}a_y+m_1^{\mathrm{T}}a_x+b_y^{\mathrm{T}}+n_y\\ a_{\mathrm{mz}}=s_z^{\mathrm{T}}a_z+m_2^{\mathrm{T}}a_x+m_3^{\mathrm{T}}a_y+b_z^{\mathrm{T}}+n_z\end{cases} \tag{17}$$

其中，n_x，n_y 和 n_z 分别为加速度计三轴测量噪声，用均值为 0，标准差为 σ_x，σ_y 和 σ_z 的高斯噪声表示。分在 n 个位置生成 n 组数据，即可根据式（15）得到误差系数。为了验证本文方法的有效性和优越性，选取 G-N 法和 L-M 法作为对比。其中 G-N 法和 L-M 法需初始值，设为 $\boldsymbol{e}^0=[s_x^0, s_y^0, s_z^0, b_x^0, b_y^0, b_z^0, m_1^0, m_2^0, m_3^0]$，由于不同的加速度计噪声量级、姿态数量和参数初始值会影响优化的效果，下面分开讨论。

3.1　加速度计观测姿态数量的影响

标定过程中要求加速度计处于不同姿态，且保持姿态稳定，以避免振动噪声的干扰。另外，数据序列要足够多，且序列之间相关性要尽量小[11]，变换更多的加速度计姿态数量 n，采集更多的序列，可以更准确地估计标定参数。下面进行仿真分析。参考本文原子重力仪和加速度计实测数据，将原子重力仪的噪声水平 σ_g 设定为 10^{-5} m·s^{-2}，目前原子重力仪野外静态测量可以达到该精度水平，加速度计的噪声水平设定为 10^{-3} m·s^{-2}，参数真值设定为

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=[1.1, 0.95, 1.2, 0.3, -0.6, 0.3, 0.01, 0.02, 0.03] \tag{18}$$

参数初始值为

$$\boldsymbol{e}_1^0=[1,1,1,0,0,0,0,0,0] \tag{19}$$

首先，取姿态数量 n 为 10，利用 G-N 法、L-M 法以及本文方法分别得到参数，如表 1 所示。为了体现其计算复杂度，将计算耗时以及 G-N 法和 L-M 法的迭代次数同时列于表 1，计算得到的参数与其真实值之间的均方误差（Mean Square Error，MSE），作为衡量标定结果优劣的标准。

而后保持其他设定不变，增加 n 分别至 20 和 30，结果分别列于表 2 和表 3。

表 1 各种方法得到的标定参数对比（$n=10$）

Tab. 1 Comparison of calibration parameters obtained by various methods（$n=10$）

误差系数	设定值	G-N 法	L-M 法	本文方法
s_x	1.100	2.812	2.622	1.089
s_y	0.950	0.949	0.949	0.949
s_z	1.200	1.198	1.198	1.198
b_x/（m·s^{-2}）	0.300	0.285	0.287	0.285
b_y/（m·s^{-2}）	−0.600	−0.618	−0.617	−0.618
b_z/（m·s^{-2}）	0.300	0.323	0.323	0.324
m_1	0.010 0	2.260 5	2.079 9	0.874 9
m_2	0.020 0	0.123 2	0.114 0	0.018 9
m_3	0.030 0	0.031 2	0.031 3	0.031 2
MSE	—	0.889 6	0.734 6	0.083 26
耗时/s	—	1.95	156.96	0.90
迭代次数	—	4	158	—

表 2 各种方法得到的标定参数对比（$n=20$）

Tab. 2 Comparison of calibration parameters obtained by various methods（$n=20$）

误差系数	设定值	G-N 法	L-M 法	本文方法
s_x	1.100	1.240	1.239	1.098
s_y	0.950	0.945	0.945	0.944
s_z	1.200	1.186	1.186	1.184
b_x/（m·s^{-2}）	0.300	0.286	0.286	0.289
b_y/（m·s^{-2}）	−0.600	−0.581	−0.581	−0.584
b_z/（m·s^{-2}）	0.300	0.442	0.442	0.461
m_1	0.010 0	−0.491 6	−0.491 3	−0.412 7
m_2	0.020 0	0.008 5	0.008 5	0.020 2
m_3	0.030 0	0.027 8	0.027 8	0.028 0
MSE	—	0.032 46	0.032 43	0.022 80
耗时/s	—	2.40	138.41	0.91
迭代次数	—	4	96	—

表 3 各种方法得到的标定参数对比（$n=30$）

Tab. 3 Comparison of calibration parameters obtained by various methods（$n=30$）

误差系数	设定值	G-N 法	L-M 法	本文方法
s_x	1.100	1.118	1.117	1.096
s_y	0.950	0.949	0.949	0.948
s_z	1.200	1.197	1.197	1.196
b_x/（m·s^{-2}）	0.300	0.295	0.295	0.295
b_y/（m·s^{-2}）	−0.600	−0.600	−0.600	−0.599
b_z/（m·s^{-2}）	0.300	0.334	0.334	0.342
m_1	0.010 0	0.190 8	0.185 4	0.174 6
m_2	0.020 0	0.026 8	0.026 6	0.020 4
m_3	0.030 0	0.029 9	0.029 9	0.029 8
MSE	—	0.003 81	0.003 59	0.003 21
耗时/s	—	3.00	322.58	0.70
迭代次数	—	4	158	—

从表 1～表 3 可以看出，无论加速度计姿态数量为何值，本文方法相比于 G-N 法和 L-M 法，均得到了更佳的标定参数，且耗时更短。G-N 法和 L-M 法的效果相当，但由于 G-N 法是二阶收敛，仅需更少的迭代次数就能收敛，具有更快的收敛速度。随着加速度计姿态数量的增加，各种方法寻优的标定参数均更准确，但 G-N 和 L-M 两种方法相应的计算量也在增大，因此适中的加速度计姿态数量，如 $n=20$，可以使这两种方法在精度和耗时之间达到平衡。而本文方法没有此顾虑，理论上 n 越大，得到的参数精度越高，而计算耗时并不会显著增大。但实际上，结合原子重力仪动态测量试验系统结构，其稳定平台可稳定的角度有限，当观测数量过多时，每次姿态变化的角度较小，相邻两次加速度计测量结果较为接近，不能满足不同数据相关性尽量小的要求，可能无法有效提升标定精度。

3.2 加速度计测量噪声的影响

加速度计噪声水平对标定结果的计算和迭代过程都有影响，不同的加速度计测量噪声水平带来不同的标定结果。仍然将原子重力仪的噪声水平 σ_g 设定为 10^{-5} m·s^{-2}，参数真值为式（18），参数初始值为式（19），观测姿态数量为 20。首先将加速度计的噪声水平提升至 10^{-2} m·s^{-2}，重复 3.1 节的试验，结果列于表 4。

表 4　各种方法得到的标定参数对比
（加速度计噪声水平 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=10^{-2}$ m·s^{-2}）
Tab. 4　Comparison of calibration parameters obtained by various methods (accelerometer noise level $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=10^{-2}$ m·s^{-2})

误差系数	设定值	G-N 法	L-M 法	本文方法
s_x	1.100	未收敛	279.47	0.513
s_y	0.950		132.73	0.442
s_z	1.200		23 635.3	0.247
b_x/（m·s^{-2}）	0.300		−106.94	0.724
b_y/（m·s^{-2}）	−0.600		207.28	−1.045
b_z/（m·s^{-2}）	0.300		−237 394.4	3.571
m_1	0.010 0		205.86	0.553 5
m_2	0.020 0		961.21	−0.049 7
m_3	0.030 0		−5 346.21	0.069 6
MSE	—		6.327×10^{9}	1.432
耗时/s	—	14.82	98.40	0.59
迭代次数	—	25	73	—

G-N 法未能收敛，原因可能在于其计算过程中目标函数模的雅可比矩阵为奇异矩阵或病态矩阵，此时，增量的稳定性较差，导致算法不能收敛；也可能是计算的步长在某些方向过大，局部二阶近似不够准确，使代价函数变得更大，直至无穷而发散。从观察到的迭代结果看，应为第二种可能。而 L-M 法虽然收敛，但是得到的参数与设定值相差甚远，即收敛到了其他局部最优位置。

然后，将加速度计的噪声水平降低至 10^{-4} m·s^{-2}，结果列于表 5。从表 2、表 4 和表 5 可以看出，加速度计测量噪声水平越低，则标定的结果越准确，加速度计测量噪声水平太大将导致 G-N 法和 L-M 法不收敛或者收敛到局部最优，而本文方法获得的标定参数精度也不高。因此要求加速度计在每个位置的测量过程中尽量保持姿态稳定，或者每个位置测量更长时间取均值，避免额外的噪声干扰。

表 5　各种方法得到的标定参数对比
（加速度计噪声水平 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=10^{-4}$ m·s^{-2}）
Tab. 5　Comparison of calibration parameters obtained by various methods (accelerometer noise level $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=10^{-4}$ m·s^{-2})

误差系数	设定值	G-N 法	L-M 法	本文方法
s_x	1.100	1.103	1.117	1.099
s_y	0.950	0.948	0.948	0.947
s_z	1.200	1.195	1.195	1.193
b_x/（m·s^{-2}）	0.300	0.313	0.314	0.317
b_y/（m·s^{-2}）	−0.600	−0.611	−0.612	−0.615
b_z/（m·s^{-2}）	0.300	0.350	0.354	0.367
m_1	0.010 0	−0.080 2	−0.170 1	−0.070 6
m_2	0.020 0	0.015 7	0.013 0	0.018 1
m_3	0.030 0	0.031 2	0.031 3	0.031 4
MSE	—	1.216×10^{-3}	4.404×10^{-3}	1.285×10^{-3}
耗时/s	—	2.29	27.39	0.78
迭代次数	—	4	26	—

3.3　参数初始值的影响

本文的最小二乘方法无须设置参数初始值，但是 G-N 法和 L-M 法对参数初始值有较大的依赖，因此，探究参数初始值的设定对标定结果的影响。仍然将原子重力仪的噪声水平 σ_g 设定为 10^{-5} m·s^{-2}，加速度计的噪声水平设定为 10^{-3} m·s^{-2}，为了尽量降低噪声带来的随机性，这里的噪声采用伪随机数，即各次试验添加的噪声数值一致。姿态数量 n 为 20，参数真值设定为式（18）。将参数初始值改变为式（20），此初始值与参数的设定值有较大的差异，得到的标定参数及评估结果列于表 6。

$$\boldsymbol{e}_2^0=[2,2,2,2,2,2,2,2,2] \tag{20}$$

保持其他设定不变，设置接近设定值的参数初始值为

$$\boldsymbol{e}_3^0=[1.05,1,1.15,0.25,-0.65,0.35,0.015,0.015,0.035] \tag{21}$$

得到的标定参数及评估结果列于表 7。

表 6 各种方法得到的标定参数对比（参数初始值为 e_2^0）

Tab. 6 Comparison of calibration parameters obtained by various methods (initial value of the parameter is e_2^0)

误差系数	设定值	G-N 法	L-M 法	本文方法
s_x	1.100	未收敛	1.239	1.098
s_y	0.950		0.945	0.944
s_z	1.200		1.186	1.184
$b_x/(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	0.300		0.286	0.289
$b_y/(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	−0.600		−0.581	−0.584
$b_z/(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	0.300		0.442	0.461
m_1	0.010 0		−0.491 3	−0.412 7
m_2	0.020 0		0.008 5	0.020 2
m_3	0.030 0		0.027 8	0.028 0
MSE	—		0.032 4	0.022 8
耗时/s	—	4.04	924.94	0.20
迭代次数	—	7	595	—

表 7 各种方法得到的标定参数对比（参数初始值 e_3^0）

Tab. 7 Comparison of calibration parameters obtained by various methods (initial value of the parameter is e_3^0)

误差系数	设定值	G-N 法	L-M 法	本文方法
s_x	1.100	1.099	1.099	1.098
s_y	0.950	0.945	0.945	0.944
s_z	1.200	1.186	1.186	1.184
$b_x/(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	0.300	0.2960	0.2960	0.289
$b_y/(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	−0.600	−0.589	−0.589	−0.584
$b_z/(\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	0.300	0.442	0.442	0.461
m_1	0.010 0	−0.201 2	−0.201 6	−0.412 7
m_2	0.020 0	0.020 5	0.020 5	0.020 2
m_3	0.030 0	0.027 8	0.027 8	0.028 0
MSE	—	0.007 237	0.007 256	0.022 80
耗时/s	—	2.31	28.08	0.23
迭代次数	—	4	26	—

由表 2、表 6 和表 7 可以看出，参数的初始值越偏离真实值，G-N 法和 L-M 法均需要更多的时间或更多次迭代才能得到参数，当偏离过大时，甚至无法收敛。当初始值与设定值接近时，G-N 法和 L-M 法得到的参数精度优于本文方法，但是，这种情形在实际标定试验中不易实现。

从仿真试验可以总结以下结论：

1）在大多数情形下，本文方法相比于 G-N 法和 L-M 法在精度和耗时上均有优势。只有当初始值十分接近真实值时，G-N 法和 L-M 法的精度更高，但这种情形在实际标定中不易实现。

2）加速度计姿态数量 n 应足够多，以提高本文方法的精度。结合稳定平台的转动范围，在实际标定试验中，取 $n=20$。

3）为了降低加速度计噪声的影响，试验过程中力求保证每个测量位置的姿态稳定，同时采用温控装置控制加速度计的温度，由此可以在一定程度上抑制测量噪声。

4 加速度计标定方法实测试验

在充分开展仿真试验后，利用原子重力仪动态测量系统采集数据，进行实测试验。如图 1 所示，原子重力仪动态测量系统主要包括原子重力仪、加速度计和双轴稳定平台 3 部分[24]。其中，原子重力仪主要包括真空系统、光学系统和控制系统 3 部分。真空系统为原子捕获、下落和探测的场所，真空环境有利于减少空气阻力对重力测量的影响。光学系统提供原子重力仪工作过程中所需的不同偏振、功率、频率的激光。控制系统实现时序控制、信号采集和算法运行等功能。

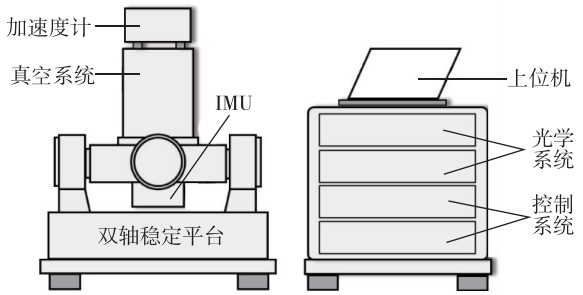

图 1 原子重力仪动态测量装置

Fig. 1 Dynamic measuring device of atom gravimeter

加速度计固定在原子重力仪反射镜上，测量其振动加速度，从而对原子重力仪进行振动校正。加速度计利用温控系统保证输出信号的稳定性。将真空探头以及加速度计放置于双轴稳定平台上，在运动过程中保持拉曼光波矢方向与重力方向重合，减小倾斜角的影响[25]，保证原子重力仪和加速度计测量的是竖直方向的加速度。稳定平台中的惯性测量单元（Inertial Measurement Unit，IMU）为平台台面提供姿态基准。为了提高精度，通常采用惯导与 GNSS 组合的导航解算方案。使用的加速度计为 Nanometrics 公司的 Titan 型力平

衡加速度计，其误差以及噪声指标如表 8 所示。

表 8　Titan 型力平衡加速度计的噪声指标

Tab. 8　Noise indicators of Titan type force balance accelerometer

主要参数	典型值
零偏重复性	±0.005 g
轴对轴灵敏度	0.5%
非线性	0.015%
温度零偏系数	6×10^{-5} g/℃，水平轴 3.2×10^{-4} g/℃，垂直轴

利用原子重力仪动态测量系统进行加速度计现场标定的流程如图 2 所示，试验场景如图 3 所示。首先，利用原子重力仪在静态条件下测量得到该点的重力加速度值 g_m。加速度计开机后，利用试验系统的稳定平台，将加速度计稳定于不同的姿态。姿态的选择应尽可能体现差异，先固定某一水平姿态角，如 θ_x，调节 θ_y 由某一角度变换到另一角度，如−30°增大到 30°，每次调节的角度可以不固定。而后，固定另一水平姿态角，重复上述步骤，每次姿态停留的采集时间约 20 s，加速度计采样率设置为 5 kHz，采集 20 个不同姿态下的加速度的三轴输出，如图 4 所示。

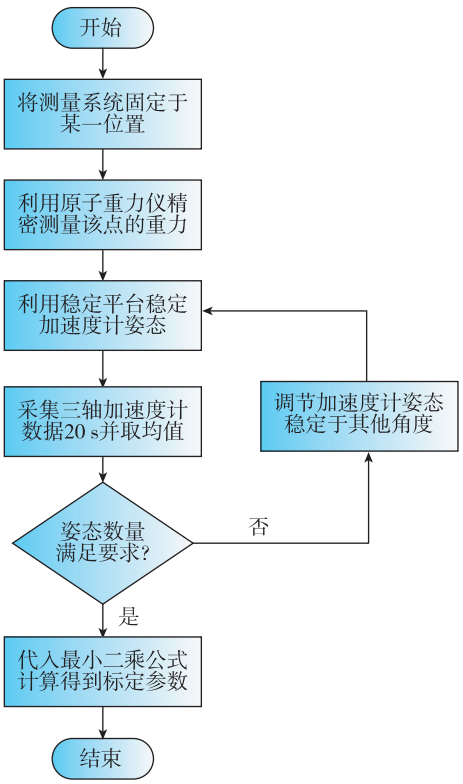

图 2　加速度计现场标定流程图

Fig. 2　Flowchart of accelerometer field calibration

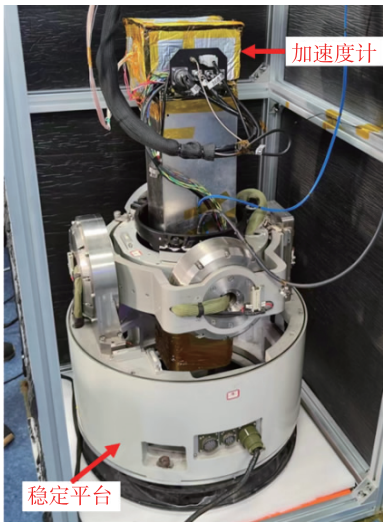

图 3　加速度计现场标定试验场景

Fig. 3　Scenario of accelerometer field calibration experiment

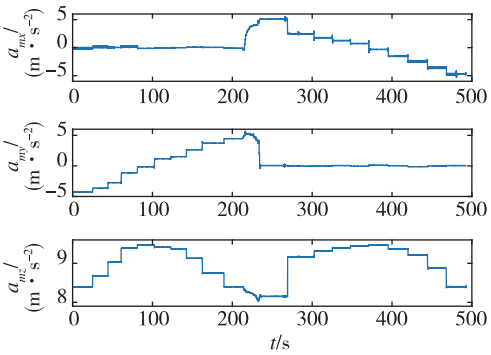

图 4　标定过程中的加速度计三轴输出

Fig. 4　Three-axis output of accelerometer during calibration

每个位置的加速度计的输出取均值，利用本文提出的标定方法，并对比 G-N 法和 L-M 法，计算误差参数，结果列于表 9。由于没有参考值，参数 MSE 无法计算，利用各种方法得到的标定参数计算加速度计三轴输出，基于重力矢量模不变原则，将其矢量模与原子重力仪测量得到的重力值作比较，计算 RMSE。可以看出，本文方法得到的标定参数具有较高精度，且耗时更短。力平衡加速度计 Z 轴输出内置了偏移 g_0，在中纬度海平面附近为 9.806 65 m·s^{-2}，但加速度计移动到不同纬度和海拔时，将发生变化。

进一步验证本文方法的有效性，计算标定前后加速度计三轴输出的矢量模，如图5所示。以

表 9 各种方法得到的标定参数对比

Tab. 9 Comparison of calibration parameters obtained by various methods

误差系数	G-N 法	L-M 法	本文方法
s_x	1.068 1	1.068 1	1.004 3
s_y	0.994 9	0.994 9	0.998 6
s_z	1.040 1	1.040 1	0.989 8
b_x/ (m·s^{-2})	0.007 60	0.007 60	0.000 12
b_y/ (m·s^{-2})	0.012 03	0.012 03	0.000 15
b_z/ (m·s^{-2})	9.722 12	9.722 12	9.792 94
m_1	−0.007 84	−0.007 84	0.001 62
m_2	−0.014 12	−0.014 12	−0.009 25
m_3	−0.002 23	−0.002 23	0.008 57
RMSE	1.236×10^{-2}	1.236×10^{-2}	7.355×10^{-3}
耗时/s	2.38	175.18	0.63
迭代次数	4	123	—

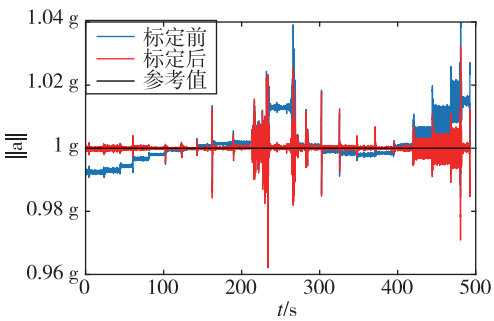

图 5 加速度计标定前后矢量模对比

Fig. 5 Comparison of vector norms before and after accelerometer calibration

原子重力仪测量的重力加速度值 g_m 作为参考，标定前加速度计矢量模平均值为 1.003 5 g，残差标准差为 0.006 1 g。这个结果也表明了此加速度计存在标度因数、零位偏置等安装误差。本文方法标定后，加速度计矢量模平均值下降到 1.000 1 g，更接近重力参考值，标准差为 0.001 8 g，相比于标定前下降了 70.5%，表明了本文方法的有效性。

5 结 论

本文结合原子重力仪动态测量系统开展加速度计的现场标定方法研究，基于加速度计矢量模不变原则，建立代价函数，并对其进行合理简化，推导线性模型。采用线性最小二乘方法，无须初始值，无须迭代，可以高效完成加速度计的现场标定，提高加速度计测量的准确性。通过仿真和实测试验证明了本文方法的有效性和优势。

目前本文方法使用了较多的姿态位置停留，每次标定需要花费较多时间，下一步可以对加速度计姿态停留进行优化，寻求使用较少的姿态停留完成标定，进一步提高效率。此外，还需考虑加速度计质量块与原子重力仪反射镜中心不重合而产生的加速度传递问题，建立更为准确的加速度计输出模型。

参考文献 (References)

[1] RICHARDSON L L. Inertial noise post-correction in atom interferometers measuring the local gravitational acceleration [D]. Hannover: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2019.

[2] LAUTIER J, VOLODIMER L, HARDIN T, et al. Hybridizing matter-wave and classical accelerometers [J]. Applied Physics Letters, 2014, 105 (14): 144102.

[3] SYED Z F, AGGARWAL P, GOODALL C, et al. A new multi-position calibration method for MEMS inertial navigation systems [J]. Measurement Science and Technology, 2007, 18 (7): 1897.

[4] 牛小骥，高钟毓，张嵘，等. 基于微机械惯性传感器的卫星电视天线稳定系统 [J]. 中国惯性技术学报，2002，10 (5)：12-16.
NIU X J, GAO Z Y, ZHANG R, et al. Satellite TV antenna attitude stabilization system based on micromachined inertial sensors [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2002, 10 (5): 12-16 (in Chinese).

[5] SHIN E H, EL-SHEIMY N. A new calibration method for strapdown inertial navigation systems [J]. ZFV: Zeitschrift fur Geodasie, Geoinformation und Landmanagement, 2002, 127 (1): 41-50.

[6] PAN J, ZHANG C, CAI Q. An accurate calibration method for accelerometer nonlinear scale factor on a low-cost three-axis turntable [J]. Measurement Science and Technology, 2014, 25 (2): 025102.

[7] WANG S, REN S. Calibration of cross quadratic term of gyro accelerometer on centrifuge and error analysis [J]. Aerospace Science and Technology, 2015, 43: 30-36.

[8] GAO P, LI K, WANG L, et al. A self-calibration method for accelerometer nonlinearity errors in triaxis rotational inertial navigation system [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2017, 66 (2): 243-253.

[9] LU J, LEI C, LIANG S, et al. An all-parameter system-level calibration for stellar-inertial navigation system on ground [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2017, 66 (8): 2065-2073.

[10] SORIANO M A，KHAN F，AHMAD R. Two-axis accelerometer calibration and nonlinear correction using neural networks：design，optimization，and experimental evaluation [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2020，69 (9)：6787-6794.

[11] 徐源，王海涌. 基于重力矢量模的 MEMS 加速度计无依托标定法 [J]. 导弹与航天运载技术，2022 (3)：92-96.
XU Y，WANG H Y. A calibration method based on modulus of gravity vector for accelerometer without external equipments [J]. Missiles and Space Vehicles，2022 (3)：92-96 (in Chinese).

[12] 方杰. 集成化原子重力仪研究 [D]. 武汉：华中科技大学，2019.
FANG J. Study on compact atom gravimeters [D]. Wuhan：Huazhong University of Science & Technology，2019 (in Chinese).

[13] XU T，XU X，XU D，et al. A novel calibration method using six positions for MEMS triaxial accelerometer [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2021，70：1-11.

[14] KHANKALANTARY S，RANJBARAN S，EBADOLLAHI S. Simplification of calibration of low-cost MEMS accelerometer and its temperature compensation without accurate laboratory equipment [J]. Measurement Science and Technology，2021，32 (4)：045102.

[15] WANG S，YANG G，WANG L. An improve hybrid calibration scheme for strapdown inertial navigation system [J]. IEEE Access，2019 (7)：151669-151681.

[16] QURESHI U，GOLNARAGHI F. An algorithm for the in-field calibration of a MEMS IMU [J]. IEEE Sensors Journal，2017，17 (22)：7479-7486.

[17] LIU B，WEI S，SU G，et al. An improved fast self-calibration method for hybrid inertial navigation system under stationary condition [J]. Sensors，2018，18 (5)：1303.

[18] 占伟伟，蔡莉. 一种减小加速度计重力法标定中安装误差影响的方法 [J]. 振动与冲击，2019，38 (13)：249-252.
ZHAN W W，CAI L. A method reducing effect of installation error in accelerometer gravimetric calibration [J]. Journal of Vibration and Shock，2019，38 (13)：249-252 (in Chinese).

[19] SÄRKKÄ O，NIEMINEN T，SUURINIEMI S，et al. A multi-position calibration method for consumer-grade accelerometers，gyroscopes，and magnetometers to field conditions [J]. IEEE Sensors Journal，2017，17 (11)：3470-3481.

[20] GHEORGHE M V. Advanced calibration method for 3-axis MEMS accelerometers [C] //Proceedings of the 2016 International Semiconductor Conference (CAS). Sinaia，Romania：IEEE，2016.

[21] TEDALDI D，PRETTO A，MENEGATTI E. A robust and easy to implement method for IMU calibration without external equipments [C] //Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Hong Kong，China：IEEE，2014：3042-3049.

[22] FONG W T，ONG S K，NEE A Y C. Methods for in-field user calibration of an inertial measurement unit without external equipment [J]. Measurement Science and Technology，2008，19 (8)：085202.

[23] GLUECK M，OSHINUBI D，SCHOPP P，et al. Real-time autocalibration of MEMS accelerometers [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2014，63 (1)：96-105.

[24] HUANG C F，LI A，QIN F J，et al. An atomic gravimeter dynamic measurement method based on Kalman filter [J]. Measurement Science and Technology，2023，34 (1)：015013.

[25] 吴彬，程冰，付志杰，等. 大倾斜角度下基于冷原子重力仪的绝对重力测量 [J]. 物理学报，2018，67 (19)：71-81.
WU B，CHENG B，FU Z J，et al. Measurement of absolute gravity based on cold atom gravimeter at large tilt angle [J]. Acta Physica Sinica，2018，67 (19)：71-81 (in Chinese).