

# 基于多矢量定姿的动基座最优化对准算法<sup>\*</sup>

刘文倩<sup>1,2</sup>, 程向红<sup>1,2</sup>, 曹鹏<sup>3</sup>, 丁鹏<sup>1,2</sup>

(1. 东南大学 微惯性仪表与先进导航技术教育部重点实验室·南京·210096;

2. 东南大学 仪器科学与工程学院·南京·210096;

3. 上海航天控制技术研究所·上海·201109)

**摘要:** 针对车载捷联惯导系统(Strapdown Inertial Navigation System, SINS)的传统动基座粗对准方法精度低且环境适应性差的问题,提出了一种基于多矢量定姿的动基座最优化粗对准算法。在传统的基于重力矢量的初始对准方法的基础上,将姿态矩阵求解问题转化成了Wahba问题,实现了对多个时刻重力矢量信息的充分利用,并通过SVD算法实现了对Wahba问题的求解。结合全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)的输出信息和SINS输出信息,构建了状态方程和量测方程,采用Sage-Husa自适应滤波算法解决了量测噪声不准确的问题,不断修正载体系变换矩阵以获得更加精确的姿态转换矩阵。仿真和半物理实验表明,改进算法能够明显提高惯导系统在动基座下的姿态精度,转台实验对准方位误差小于0.05°。

**关键词:** 捷联惯导系统; 动基座对准; Wahba问题; SVD算法; Sage-Husa自适应滤波

中图分类号: U666.1

文献标志码: A

文章编号: 2096-5974(2021)05-0027-07

## Optimal Alignment Algorithm for Moving Base Based on Multi Vector Attitude Determination

LIU Wenqian<sup>1,2</sup>, CHENG Xianghong<sup>1,2</sup>, CAO Peng<sup>3</sup>, DING Peng<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory of Micro-Inertial Instrument and Advanced Navigation Technology,

Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096;

2. School of Instrument Science & Engineering, Southeast University, Nanjing 210096;

3. Shanghai Aerospace Control Technology Institute, Shanghai 201109)

**Abstract:** Aiming at the problems of low precision and poor adaptability of traditional moving base coarse alignment method for vehicle strapdown inertial navigation system (SINS), an optimal coarse alignment algorithm for moving base based on multi vector attitude determination is proposed. On the basis of the traditional initial alignment method based on gravity vector, the problem of solving attitude matrix is transformed into Wahba problem to make full use of the information of gravity vector at multiple times. The problem of solving Wahba is solved by SVD algorithm. Combining the output information of global navigation satellite system (GNSS) and SINS, the process equation and measurement equation are constructed. Sage-Husa adaptive filtering algorithm is used to solve the problem of measurement noise inaccuracy, and the transform matrix of carrier frame is continuously modified to obtain more accurate attitude conversion matrix. Simulation and semi physical experiments show that the improved algorithm can significantly improve the alignment accuracy, and the alignment azimuth error of turntable experiment is less than 0.05°.

**Keywords:** strapdown inertial navigation system; moving base alignment; Wahba problem; SVD algorithm; Sage-Husa adaptive filtering

\* 收稿日期: 2021-03-18; 修回日期: 2021-08-30

基金项目: 上海航天科技创新基金(SAST2019-079)

作者简介: 刘文倩(1993—), 女, 博士生。E-mail: liuwenqian328@163.com

通信作者简介: 程向红(1963—), 女, 博士, 教授, 博士生导师。E-mail: xhcheng@seu.edu.cn

## 0 引言

初始对准技术是捷联惯导系统的核心问题和关键技术。初始对准本质上是确定初始姿态矩阵的过程<sup>[1-6]</sup>，包括粗对准阶段和精对准阶段<sup>[7-8]</sup>。粗对准是在短时间内提供一个大致已知的初始姿态矩阵，为精对准做好准备。代表性的粗对准方法主要包括静基座或准静基座下的解析法，以及动态环境下的基于优化的对准方法。解析法以地球自转角速度和重力加速度作为信息源<sup>[9]</sup>。虽然解析法原理简单，计算量小，但其仅利用了两个不同时刻的矢量观测信息，信息利用率不高，对准精度较低<sup>[8]</sup>。因此，可构建观测矢量组<sup>[10-14]</sup>，将对准问题转化为多矢量定姿问题——即 Wahba 问题的求解。Wu 和 Pan 等<sup>[10,15]</sup>采用最优对准（Optimization-Based Alignment, OBA）方法提高了信息的利用率，从而提高了对准精度。但是，OBA 方法的主要缺点是无法抵抗由陀螺偏置和随机噪声带来的影响。为了解决这些问题，Huang 等<sup>[16]</sup>提出了一种新的快速运动粗对准方法（DAEBIA-FT）用于低成本的 SINS/GPS 系统。Chang 等<sup>[17]</sup>将姿态对准问题转化成了姿态估计问题。但是，这些方法均需建立非线性状态空间模型，由此增加了计算难度。

本文基于最优粗对准思想，利用 SVD 算法求解了 Wahba 问题，并通过建立线性状态方程，利用自适应卡尔曼滤波得到了修正后的载体系的变化矩阵  $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$ 。与传统 OBA 方法相比，可进一步提高对准精度。

## 1 坐标系定义

常用坐标系的定义如下：

(1) 地球坐标系(*e* 系)— $o_e x_e y_e z_e$ ：地球坐标系的原点位于地心， $o_e z_e$  轴沿地球自转方向， $o_e x_e$  轴在赤道平面内，由地心指向载体所处子午线。*e* 系与地球固联，随地球自转而转。

(2) 导航坐标系(*n* 系)— $o_n x_n y_n z_n$ ：导航坐标系的原点位于载体重心， $o_n x_n$  轴指向水平东向， $o_n y_n$  轴指向水平北向， $o_n z_n$  轴垂直于当地旋转椭球面并指向天。

(3) 载体坐标系(*b* 系)— $o_b x_b y_b z_b$ ：载体坐标系的原点位于载体重心， $o_b x_b$  轴指向载体横轴向右， $o_b y_b$  轴指向载体纵轴向前， $o_b z_b$  轴沿载体立轴向上。

(4) 初始时刻载体惯性坐标系(*b*(0) 系)— $o_{b(0)} x_{b(0)} y_{b(0)} z_{b(0)}$ ：初始时刻将 *b* 系凝固后形成的坐标系。

(5) 初始时刻导航惯性坐标系(*n*(0) 系)— $o_{n(0)} x_{n(0)} y_{n(0)} z_{n(0)}$ ：初始时刻将 *n* 系凝固后形成的坐标系。

## 2 初始对准算法

传统双矢量定姿要求两个量测矢量具有极高的准确度，量测不准确会产生较大的对准误差。为克服该缺陷并提高对准精度，本文采用多矢量提供量测信息并进行对准，通过多个量测信息求解最优正交矩阵，将对准问题转化成了 Wahba 问题。

### 2.1 矢量信息的计算

根据姿态矩阵链式法则，姿态矩阵  $\mathbf{C}_b^n(t)$  可以分解为

$$\mathbf{C}_b^n(t) = \mathbf{C}_{n(0)}^{n(t)} \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} \quad (1)$$

在式(1) 姿态矩阵的分解中， $\mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)}$  表示载体惯性坐标系相对导航惯性坐标系的姿态变换矩阵。 $\mathbf{C}_{n(0)}^{n(t)}$ 、 $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$  分别表示导航惯性坐标系相对于 *t* 时刻导航坐标系的变换矩阵和载体惯性坐标系相对于 *t* 时刻载体坐标系的变换矩阵。 $(\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)})^T = \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$ ， $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$  可根据如下微分方程进行求解

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{C}}_{b(t)}^{b(0)} = \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) \\ \dot{\mathbf{C}}_{n(t)}^{n(0)} = \mathbf{C}_{n(t)}^{n(0)} (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \end{cases} \quad (2)$$

式(2) 中， $\boldsymbol{\omega}_{ib}$  表示陀螺仪三轴输出； $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$  表示导航坐标系相对于惯性系的旋转； $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times$ 、 $\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times$  分别为向量  $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 、 $\boldsymbol{\omega}_{in}^n$  对应的反对称矩阵，文中的“ $\times$ ”均表示叉乘运算。根据式(1) 可知，求解姿态矩阵的关键在于求解  $\mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)}$ 。SINS 比力方程为  $\dot{\mathbf{V}}^n = \mathbf{C}_b^n f^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{V}^n + \mathbf{g}^n$ 。其中， $\mathbf{V}^n$  为导航坐标系中速度， $f^b$  表示加速度计输出， $\mathbf{g}^n$  为重力加速度， $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$  表示地球自转角速度在导航坐标系中的投影， $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$  表示由载体线运动引起的导航坐标系相对于地球坐标系的角速度在导航坐标系下的投影。将式(1) 代入比力方程中，可得到式(3)

$$\dot{\mathbf{V}}^n = \mathbf{C}_{n(0)}^{n(t)} \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} f^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{V}^n + \mathbf{g}^n \quad (3)$$

对式(3) 进行移项，两边同乘  $\mathbf{C}_{n(t)}^{n(0)}$  并且积分，积分区间为  $[0, t_k]$ ，可得到式(4)

$$\int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{n(0)} [\dot{\mathbf{V}}^n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{V}^n - \mathbf{g}^n] dt = \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} f^b dt \quad (4)$$

进行分解可得

$$\int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} d\mathbf{V}^n + \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}^n dt + \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \mathbf{V}^n dt - \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \mathbf{g}^n dt = \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{(0)} \mathbf{f}^b dt \quad (5)$$

$$\mathbf{C}_{n(t_k)}^{(0)} \mathbf{V}^n(t_k) - \mathbf{V}^n(0) + \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}^n dt - \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \mathbf{g}^n dt = \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{(0)} \mathbf{f}^b dt \quad (6)$$

将式 (6) 左边定义为  $\beta$ , 表示为

$$\beta = \mathbf{C}_{n(t_k)}^{(0)} \mathbf{V}^n(t_k) - \mathbf{V}^n(0) + \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}^n dt - \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \mathbf{g}^n dt \quad (7)$$

令  $\alpha = \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{(0)} \mathbf{f}^b dt$ , 则式 (5) 可表示为

$$\beta = \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha \quad (8)$$

将  $\beta$  中的因式离散化求解如下

$$\begin{aligned} \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}^n dt &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}_{n(t_i)}^{(0)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}^n dt \\ &\approx \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}_{n(t_i)}^{(0)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{I} + (t - t_i) \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \left( \mathbf{V}^n(t_i) + \frac{t - t_i}{T} (\mathbf{V}^n(t_{i+1}) - \mathbf{V}^n(t_i)) \right) dt \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}_{n(t_i)}^{(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} \mathbf{I} + \frac{T^2}{6} \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \right) \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}^n(t_i) + \left( \frac{T}{2} \mathbf{I} + \frac{T^2}{3} \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \right) \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{V}^n(t_{i+1}) \right] \int_0^t \mathbf{C}_{n(t)}^{(0)} \mathbf{g}^n dt \\ &\approx \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}_{n(t_i)}^{(0)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{I} + (t - t_i) \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{g}^n dt \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}_{n(t_i)}^{(0)} \left( T \mathbf{I} + \frac{T^2}{2} \boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \right) \mathbf{g}^n dt \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $T$  为姿态更新周期,  $k$  为更新次数,  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵。对  $\alpha$  的离散化求解如下

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{(0)} \mathbf{f}^b dt \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}_{b(t_i)}^{(0)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathbf{I} + (\int_{t_i}^t \boldsymbol{\omega}_{ib}^b dt) \times] \mathbf{f}^b dt \end{aligned} \quad (10)$$

式中,  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{I} + (\int_{t_i}^t \boldsymbol{\omega}_{ib}^b dt) \times) \mathbf{f}^b dt$  采用单子样方法。令  $\Delta v$  与  $\Delta \theta$  分别表示  $[t_i, t_{i+1}]$  时间段内的速度增量和角增量, 则有

$$\alpha = \int_0^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{(0)} \mathbf{f}^b dt = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{C}_{b(t_i)}^{(0)} \left( \Delta v + \frac{1}{2} \Delta \theta \times \Delta v \right) \quad (11)$$

## 2.2 Wahba 问题及 SVD 算法

将式 (8) 求解姿态矩阵  $\mathbf{C}_{b(0)}^{(0)}$  问题转化为求解 Wahba 问题, 定义如下所示的指标函数, 从而求解最优姿态矩阵<sup>[18]</sup>

$$J^*(\mathbf{C}_{b(0)}^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i |\beta - \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha|^2 = \min \quad (12)$$

其中,  $w_i$  为权重系数, 本文取为 1。该式反映同一矢量在两个坐标系中测量值的不一致误差。

对式 (12) 中的误差平方进行如下的等价变形

$$\begin{aligned} |\beta - \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha|^2 &= (\beta - \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha)^T (\beta - \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha) \\ &= [(\beta)^T - (\alpha)^T (\mathbf{C}_{b(0)}^{(0)})^T] (\beta - \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha) \\ &= |\beta|^2 + |\alpha|^2 - 2 |\beta|^T \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

将式 (13) 代入式 (12), 得

$$\begin{aligned} J^*(\mathbf{C}_{b(0)}^{(0)}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i |\beta - \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i (|\beta|^2 + |\alpha|^2) - \sum_{i=1}^m w_i (\beta)^T \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

其中, 在给定所有测量值后,  $\sum_{i=1}^m w_i (|\beta|^2 + |\alpha|^2)$  为已知项。要使其最小, 相当于使式(14)中的第二项  $\sum_{i=1}^m w_i (\beta)^T \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha$  达到最大。定义  $J(\mathbf{C}_{b(0)}^{(0)}) = \sum_{i=1}^m w_i (\beta)^T \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha$ , 对其进行变形可得

$$\begin{aligned} J(\mathbf{C}_{b(0)}^{(0)}) &= \sum_{i=1}^m w_i (\beta)^T \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \alpha \\ &= \text{tr} \left( \begin{bmatrix} w_1 (\beta_1)^T \\ w_2 (\beta_2)^T \\ \vdots \\ w_m (\beta_m)^T \end{bmatrix} \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_m] \right) \\ &= \text{tr} \left( \mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_m] \begin{bmatrix} w_1 (\beta_1)^T \\ w_2 (\beta_2)^T \\ \vdots \\ w_m (\beta_m)^T \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{tr} (\mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i (\beta_i)^T) \\ &= \text{tr} (\mathbf{C}_{b(0)}^{(0)} \mathbf{A}^T) = \max \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $\alpha_i$ 、 $\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 表示  $b(0)$  系下观测矢量和  $n(0)$  系下观测矢量的第  $i$  个测量值。将式(15) 中的矩阵  $A$  记为

$$\begin{aligned} A &= \left[ \sum_{i=1}^m w_i \alpha_i^{b(0)} (\beta_i^{n(0)})^\top \right]^\top \\ &= \sum_{i=1}^m w_i \beta_i^{n(0)} (\alpha_i^{b(0)})^\top \end{aligned} \quad (16)$$

假设矩阵  $A$  可逆且对其进行奇异值分解得到  $A = UDV^\top$ 。其中,  $U$  和  $V$  都是酉矩阵,  $D$  表示由矩阵  $A$  的奇异值构成的对角矩阵, 表示为  $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , 则式 (15) 可变为

$$\begin{aligned} J(\mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)}) &= \text{tr}(\mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} A^\top) = \text{tr}(\mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} (UDV^\top)^\top) \\ &= \text{tr}(\mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} VDU^\top) = \text{tr}(U^\top \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} VD) \\ &= \text{tr}(\mathbf{C}^* D) \\ &= \max \end{aligned} \quad (17)$$

其中, 记  $\mathbf{C}^* = U^\top \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} V$ 。 $\mathbf{C}^*$  是单位正交阵。记

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^* &= (\mathbf{C}_{ij}^*)(i, j = 1, 2, 3), |\mathbf{C}_{ij}^*| \leqslant 1 \\ J(\mathbf{C}_b^r) &= \text{tr}(\mathbf{C}^* D) = C_{11}^* \sigma_1 + C_{22}^* \sigma_2 + C_{33}^* \sigma_3 \\ &\leqslant \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \end{aligned} \quad (18)$$

由于奇异值大于 0, 所以式 (18) 等号成立的条件为当且仅当  $C_{11}^* = C_{22}^* = C_{33}^* = 1$ 。此时,  $\mathbf{C}^* = \mathbf{I}$ , 可求得姿态矩阵为

$$\mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} = UV^\top \quad (19)$$

### 2.3 算法优化

陀螺的零偏误差会影响矢量的精度, 因此, 本文采用 Sage-Husa 滤波<sup>[19]</sup>方法, 借助 GNSS 导航信息对陀螺仪的零偏误差进行估计, 并且将其反馈到多矢量构建中。定义由陀螺仪零偏引起的计算载体坐标系为  $\tilde{b}$ , 真实载体坐标系  $b$  与计算载体坐标系  $\tilde{b}$  的关系为

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} = \mathbf{C}_{\tilde{b}(t)}^{b(0)} \mathbf{C}_{\tilde{b}(t)}^{\tilde{b}(t)} \quad (20)$$

定义从  $b$  系到  $\tilde{b}$  系的等效旋转矢量为  $\phi$ 。根据等效旋转矢量与姿态矩阵的关系, 可得

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} = \mathbf{I}_{3 \times 3} + (\phi \times) \quad (21)$$

其中,  $\phi \times$  表示  $\phi$  对应的反对称矩阵。将式 (21) 代入式 (20) 并变形, 可得

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} = \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} = \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\mathbf{I}_{3 \times 3} + (\phi \times)) \quad (22)$$

根据姿态转换矩阵的微分方程, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_{b(t)}^{b(0)} &= \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\omega_{ib}^b \times) \\ &= \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} ((\tilde{\omega}_{ib}^b \times) - (\delta\omega_{ib}^b \times)) \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $\tilde{\omega}_{ib}^b$  表示陀螺仪的实际输出,  $\delta\omega_{ib}^b$  表示陀螺仪误差,  $\tilde{\omega}_{ib}^b \times$ 、 $\delta\omega_{ib}^b \times$  分别表示向量  $\tilde{\omega}_{ib}^b$ 、 $\delta\omega_{ib}^b$  对应的反对称矩阵。根据因式求导法则对  $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} =$

$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\mathbf{I}_{3 \times 3} - (\phi \times))$  求导, 得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_{b(t)}^{b(0)} &= \dot{\mathbf{C}}_{b(t)}^{b(0)} (\mathbf{I}_{3 \times 3} - (\phi \times)) - \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\dot{\phi} \times) - \\ &= \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) - \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) (\phi \times) - \\ &\quad \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\dot{\phi} \times) \end{aligned} \quad (24)$$

将式 (22) 代入式 (23), 忽略二阶小量, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}_{b(t)}^{b(0)} &= \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} \mathbf{C}_{\tilde{b}(t)}^{\tilde{b}(t)} ((\tilde{\omega}_{ib}^b \times) - (\delta\omega_{ib}^b \times)) \\ &\approx \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) - \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\delta\omega_{ib}^b \times) - \\ &\quad \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\phi \times) (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) \end{aligned} \quad (25)$$

令式 (24) 与式 (25) 相等, 如下

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) - \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) (\phi \times) - \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\dot{\phi} \times) = \\ \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) - \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\delta\omega_{ib}^b \times) - \\ \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\phi \times) (\tilde{\omega}_{ib}^b \times) \end{aligned} \quad (26)$$

经过简化整理, 得到

$$\dot{\phi} = -\tilde{\omega}_{ib}^b \times \phi + \delta\omega_{ib}^b \quad (27)$$

文中, 将陀螺零偏定义为常值, 因此得到

$$\dot{\epsilon}^b = 0 \quad (28)$$

根据  $\alpha = \int_0^{tk} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} f^b dt$ , 变换可得

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^{tk} \mathbf{C}_{b(tk)}^{b(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(tk)} f^b dt = \mathbf{C}_{b(tk)}^{b(0)} \int_0^{tk} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(tk)} f^b dt \\ &= \mathbf{C}_{b(tk)}^{b(0)} \int_0^{tk} \mathbf{C}_{b(0)}^{b(tk)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} f^b dt \\ &= \mathbf{C}_{b(tk)}^{b(0)} \mathbf{C}_{b(0)}^{b(tk)} \int_0^{tk} \mathbf{C}_{b(0)}^{b(0)} f^b dt \end{aligned} \quad (29)$$

记  $\tilde{\alpha} = \mathbf{C}_{b(0)}^{b(tk)} \int_0^{tk} \mathbf{C}_{b(0)}^{b(0)} f^b dt$ , 式 (8) 可重新写为

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\mathbf{I}_{3 \times 3} - (\phi \times)) \tilde{\alpha} \\ &= \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} \tilde{\alpha} + \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} \tilde{\alpha} \times \phi \end{aligned} \quad (30)$$

对式 (30) 进行整理移项, 可得到量测模型

$$\mathbf{Z}_k = \beta - \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} \tilde{\alpha} \quad (31)$$

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{C}_{b(0)}^{n(0)} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)} (\tilde{\alpha} \times) \quad (32)$$

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}_k \phi \quad (33)$$

将状态量定义为  $\mathbf{x}_k = [\phi_x, \phi_y, \phi_z, \epsilon_x^b, \epsilon_y^b, \epsilon_z^b]^\top$ , 式 (31) 表示量测量, 式 (27)、式 (28) 与式 (33) 分别表示状态方程和量测方程。通过 Sage-Husa 滤波得到修正后的  $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$ , 从而使最终的姿态矩阵  $\mathbf{C}_b^n$  更加精确。Sage-Husa 滤波可以通过时变噪声统计器, 实时估计和修正观测量的统计特性, 使其适应外界环境的变化。观测噪声的递推公式为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_k &= \frac{k-1}{k} \tilde{\mathbf{R}}_{k-1} + \frac{1}{k} \{ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{K}_k) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^\top (\mathbf{I} - \\ &\quad \mathbf{H}_k \mathbf{K}_k)^\top + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^\top \} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_k = (1 - d_k) \tilde{\mathbf{R}}_{k-1} + d_k \{ (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{K}_k) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k \mathbf{K}_k)^T + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \} \quad (35)$$

式中,  $\mathbf{H}_k$  为  $k$  时刻的量测矩阵,  $\mathbf{K}_k$  表示滤波增益,  $\mathbf{P}_k$  表示状态估计的均方误差阵,  $\mathbf{e}_k$  表示新息。式中,  $d_k = (1-b)/(1-b^{k+1})$ ,  $0 < b < 1$ ,  $b$  为遗忘因子。

### 3 仿真实验及分析

#### 3.1 数学仿真实验

为了验证算法的有效性, 设计如下实验, 并设置必需的仿真参数。采样频率: 200Hz; 对准时长: 420s; 初始经度: 106.6906°; 初始纬度: 26.5019°; 陀螺常值漂移各方向均设为 0.01 (°)/h; 陀螺随机漂移: 0.005 (°)/h<sup>1/2</sup>; 加速度计的常值偏置: 0.1mg; 加表的随机偏置: 0.1mg/Hz<sup>1/2</sup>。以式(33)作为系统的量测方程, 以式(27)和式(28)作为状态方程, 估计出状态量, 不断修正  $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$ , 再代入式(1), 与传统 OBA 方法的对准结果进行比较。初始协方差阵  $\mathbf{P}$ 、系统噪声方差阵  $\mathbf{Q}$  和量测噪声方差阵  $\mathbf{R}$  分别为

$$\mathbf{P}(0) = \text{diag}\{(0.01)^2, (0.01)^2, (0.01)^2, (0.01)^2, (0.01)^2, (0.01)^2\}$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}\{(0.01)^2, (0.01)^2, (0.01)^2\}$$

$$\mathbf{R} = \text{diag}\{(0.1)^2, (0.1)^2, (0.1)^2\}$$

仿真中, 载体首先进行 60s 的匀速运动, 在 60s~70s 进行加速运动, 加速度为 0.1m/s<sup>2</sup>, 在 80s 时进行拐弯运动, 拐弯角度为 40°, 拐弯角速度为 1 (°)/s, 并且伴有轻微的摇晃运动。航向角、俯仰角和横滚角摇晃幅度分别为 1°、2°、3°, 摆晃角频率分别为  $\pi/5$  (rad/s)、 $3\pi/10$  (rad/s)、 $2\pi/5$  (rad/s)。载体的运动轨迹如图 1 所示, 行驶过程的总时长为 420s, 最大速度约为 7m/s。

图 2 表示 OBA 方法和改进 OBA 方法在 0s~420s 内的对准误差结果, 表 1 表示两种对准方法在 350s~420s 内的姿态角误差的均方根值。从图 2 可以看出, 在 120s 时, 改进 OBA 方法的航向角误差已收敛到 0.5°以内, 而 OBA 方法的航向角误差在 200s 时约为 3°, 而表 1 中姿态角误差的均方根值明显减小, 这说明改进的 OBA 方法的航向角误差收敛速度和精度明显优于传统方法。这是由于传统方法无法抵抗陀螺零偏带来的影响, 而改进方法通过自适应卡尔曼滤波将估计结果反馈到多矢量构建过程中, 可抑制陀螺零偏的影响。不

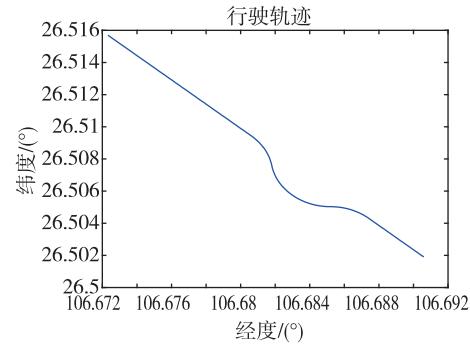


图 1 仿真运动轨迹  
Fig. 1 Simulation of trajectory

断修正  $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(0)}$  以得到更加精确的姿态矩阵  $\mathbf{C}_b^n$ , 并通过时变噪声统计器解决量测噪声不准确的问题, 进而可提高最终对准精度。

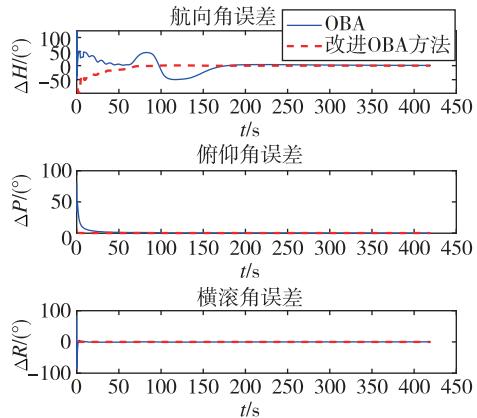


图 2 姿态角误差曲线  
Fig. 2 Attitude error curves

表 1 350s~420s 对准结果的均方根值 (RMSs)

Tab. 1 RMSs of alignment results for 350s~420s

方法	航向角/ (°)	俯仰角/ (°)	横滚角/ (°)
OBA 方法	0.9970	0.1950	0.1762
改进 OBA 方法	0.2059	0.0040	0.0057

#### 3.2 半物理仿真实验

利用三轴转台进行 3 组微幅晃动条件下的对准实验。航向角  $H$ 、俯仰角  $P$ 、横滚角  $R$  的摇摆幅值和摇摆频率设置如表 2 所示。陀螺仪和加速度计的主要技术指标为: 陀螺仪的常值漂移为 0.01(°)/h, 随机游走为 0.005(°)/h<sup>1/2</sup>, 加速度计的常值偏置为 0.1mg, 随机游走为 0.1mg/Hz<sup>1/2</sup>。图 3 表示第二组数据在分别采用传统 OBA 方法和改进 OBA 对准方法时的对准曲线。

表 2 摆摆条件设置

Tab. 2 Swing condition setting

摆摆条件	H	P	R
摆摆幅值 / (°)	3	3	5
摆摆频率 / Hz	0.2	0.2	0.8

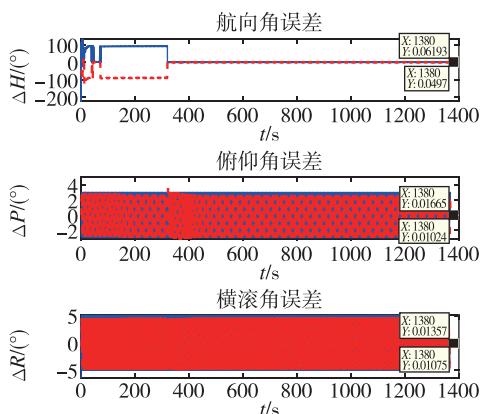


图 3 姿态角误差曲线

Fig. 3 Attitude error curves

图 3 标注的数值表示停止摆摆后的姿态角误差。从图 3 可以看出，在摆摆运动停止后，传统 OBA 方法的航向角误差为  $0.062^\circ$ ，改进 OBA 方法的航向角误差为  $0.0497^\circ$ ，改进 OBA 方法优于传统 OBA 方法。表 3 列出了 3 组转台摆摆实验的对准姿态误差角。在这 3 组数据中，较之于传统 OBA 方法，本文通过自适应滤波修正  $C_{b(t)}^{b(0)}$  的 OBA 方法可得到较小的航向角误差。在 3 组实验结果中，性能最多可以提升 43.7%，水平姿态角误差在同一数量级，对准精度获得了明显提高。

表 3 3 组实验的对准结果

Tab. 3 Alignment results of three groups of experiments

实验组次	OBA 方法 / (°) { $\Delta H$ 、 $\Delta P$ 、 $\Delta R$ }	改进 OBA 方法 / (°) { $\Delta H$ 、 $\Delta P$ 、 $\Delta R$ }
实验 1	0.0302	0.0281
	0.0056	0.0066
	0.0297	0.0295
实验 2	0.0619	0.0497
	0.0617	0.0102
	0.0136	0.0108
实验 3	0.0341	0.0192
	0.0016	0.0072
	0.0362	0.0463

## 4 结 论

本文所提出的算法可应用在车载捷联惯导动基座对准中。传统动基座粗对准方法精度低且环境适应性差，因此本文在传统 OBA 对准方法的基础上进行了改进，通过构建状态方程和量测方程，借助 GNSS 导航信息，对陀螺仪的零偏误差和  $b$  到  $b$  系的等效旋转矢量  $\phi$  进行了估计，并且将其反馈到多矢量构建中，利用自适应滤波算法解决了量测噪声不准确的问题，得到了修正后的  $C_{b(t)}^{b(0)}$ ，从而得到了更加精确的姿态转换矩阵，提高了对准精度。而数学仿真和半物理仿真也进一步验证了所提出算法的有效性和优越性。转台微晃动实验的结果表明，改进 OBA 算法的航向角误差小于  $0.05^\circ$ 。较之于传统的 OBA 算法，对准精度提高，在实际工程中具有应用价值。

## 参考文献 (References)

- [1] 曹通. 光纤陀螺捷联惯导系统在线对准及标定技术研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2012.
- CAO T. On-line alignment and calibration technique of fiber optic gyroscope SINS [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2012 (in Chinese).
- [2] 万德钧, 房建成. 惯性导航系统初始对准 [M]. 南京: 东南大学出版社, 1998: 1-10.
- WAN D J, FANG J C. Initial alignment of inertial navigation [M]. Nanjing: Southeast University Press, 1998: 1-10 (in Chinese).
- [3] 王新龙. 捷联式惯导系统动、静基座初始对准 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2013: 1-62.
- WANG X L. Initial alignment of strapdown inertial navigation system on dynamic and static bases [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2013: 1-62 (in Chinese).
- [4] 张秋昭. GPS 辅助 SINS 动态对准关键模型研究 [D]. 徐州: 中国矿业大学, 2013.
- ZHANG Q Z. Research on key models in SINS dynamic alignment aided by GPS [D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2013 (in Chinese).
- [5] 李春静. 惯导/DVL 水下动基座初始对准方法研究 [D]. 北京: 北京理工大学, 2015.
- LI C J. Research on underwater in-motion alignment for DVL-aided SINS [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2015 (in Chinese).
- [6] 高伟, 奔粤阳, 李倩. 捷联惯性导航系统初始对准技术 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2014: 1-30.
- GAO W, BEN Y Y, LI Q. Initial alignment for strapdown

- inertial navigation system [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2014: 1-30 (in Chinese).
- [7] GUO S L, CHANG L M, LI Y, et al. Robust fading cubature Kalman filter and its application in initial alignment of SINS [J]. Optik, 2020, 202 (10): 163593.
- [8] SILVA F O, HEMERLY E M, FILHO W C L. Error analysis of analytical coarse alignment formulations for stationary SINS [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2016, 52 (4): 1777-1796.
- [9] 徐博, 孙枫, 高伟. 舰船捷联航姿系统自主粗对准仿真与实验研究 [J]. 兵工学报, 2008, 29 (12): 1467-1473.
- XU B, SUN F, GAO W. The coarse alignment of strapdown inertial navigation system for ship [J]. Acta Armamentarii, 2008, 29 (12): 1467-1473 (in Chinese).
- [10] WU Y X, PAN X F. Velocity/position integration formula Part I: application to in-flight coarse alignment [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49 (2): 1006-1023.
- [11] YUAN D Y, MA X C, LIU Y, et al. Dynamic initial coarse alignment of SINS for AUV using the velocity loci and pressure sensor [J]. IET Science Measurement and Technology, 2016, 10 (8): 926-933.
- [12] 李杨, 高敬东, 胡柏青, 等. 舰载捷联惯导动基座F-QUEST初始对准方法 [J]. 海军工程大学学报, 2014, 26 (6): 32-36.
- LI Y, GAO J D, HU B Q, et al. Shipborne SINS in-motion F-QUEST initial alignment algorithm [J]. Journal of Naval University of Engineering, 2014, 26 (6): 32-36 (in Chinese).
- [13] 高薪, 卞鸿巍, 傅中泽, 等. 捷联惯导晃动基座四元数估计对准算法 [J]. 中国惯性技术学报, 2014, 22 (6): 724-727, 740.
- GAO X, BIAN H W, FU Z Z, et al. Alignment algorithm based on quaternion estimator for SINS on rocking base [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2014, 22 (6): 724-727, 740 (in Chinese).
- [14] 徐晓苏, 周峰, 张涛, 等. 基于四元数自适应卡尔曼滤波的快速对准算法 [J]. 中国惯性技术学报, 2016, 24 (4): 454-459.
- XU X S, ZHOU F, ZHANG T, et al. Initial alignment algorithm for SINS based on quaternion adaptive Kalman filter [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2016, 24 (4): 454-459 (in Chinese).
- [15] WU M P, WU Y X, HU X P, et al. Optimization-based alignment for inertial navigation systems: theory and algorithm [J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15 (1): 1-17.
- [16] HUANG Y L, ZHANG Y G, CHANG L B. A new fast in-motion coarse alignment method for GPS-aided low-cost SINS [J]. IEEE-ASME Transactions on Mechatronics, 2018, 23 (3): 1303-1313.
- [17] CHANG L, LI J, CHEN S. Initial alignment by attitude estimation for strapdown inertial navigation systems [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2015, 64 (3): 784-794.
- [18] WAHBA G. A least square estimate of spacecraft attitude [J]. SIAM Review, 1965, 7 (3): 409.
- [19] 严恭敏, 翁浚. 捷联惯导算法与组合导航原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2019: 139-159.
- YAN G M, WENG J. Strapdown inertial navigation algorithm and integrated navigation principle [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2019: 139-159 (in Chinese).